

**EINLEITENDE ÜBERSICHT ZU DEM SEMINAR
„ p -ADISCHE GALOISDARSTELLUNGEN“
IM SOMMERSEMESTER 2004**

BENJAMIN KLOPSCH

1. WIE IST DAS THEMA DES SEMINARS EINZUORDNEN?

Die endlichen algebraischen Erweiterungen des Körpers \mathbb{Q} der rationalen Zahlen spielen in der Zahlentheorie eine überaus wichtige Rolle. Als markante Beispiele seien die quadratischen Zahlkörper und die Kreisteilungskörper erwähnt, deren Struktur sehr gut verstanden ist. Der algebraische Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}$ von \mathbb{Q} , der sich aus den einzelnen endlichen algebraischen Erweiterungen zusammensetzt, ist ein ziemlich großes und kompliziertes Objekt. Die Galoissche Theorie (unendlicher Körpererweiterungen) zeigt, daß sich die Struktur von $\overline{\mathbb{Q}}$ exakt wiederfinden läßt in der absoluten Galoisgruppe $G_{\mathbb{Q}} = \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}})$ von \mathbb{Q} . Diese Gruppe trägt eine natürliche Topologie und gehört zur Klasse der sogenannten pro-endlichen Gruppen.

Eine geeignete Methode zur Erkundung der Gruppe $G_{\mathbb{Q}}$ ist es, endlich dimensionale Darstellungen von $G_{\mathbb{Q}}$ über diversen Körpern zu betrachten. Grob gesagt versucht man, die mysteriöse Gruppe $G_{\mathbb{Q}}$ stetig und homomorph auf (zumindest psychologisch) viel konkretere Matrizen Gruppen abzubilden und somit Einblick in die Struktur von $G_{\mathbb{Q}}$ zu gewinnen. Interessante Darstellungen werden auf natürliche Weise von elliptischen Kurven und anderen geometrischen Objekten vermittelt. Es stellt sich heraus, daß $G_{\mathbb{Q}}$ über dem Körper der komplexen Zahlen nur endliche Darstellungen besitzt. Ganz anders ist die Situation, wenn man als Grundkörper einen p -adischen Zahlkörper wählt. Letzteres führt zu den sogenannten p -adischen Galoisdarstellungen, zu deren Studium das Seminar hinführen möchte.

Jede p -adische Darstellung induziert (durch Restklassenbildung) eine Darstellung über einem endlichen Körper der Charakteristik p . Umgekehrt kann man versuchen, von einer vorgegebenen Darstellung über einem endlichen Körper der Charakteristik p zu einer p -adischen Darstellung aufzusteigen. Dieses Problem läßt sich in sehr allgemeiner Form erstaunlich erfolgreich behandeln. Die sogenannten Deformationen von Galoisdarstellungen, die man erhält, liefern ein wichtiges Werkzeug der modernen Zahlentheorie.

2. WAS FÜR VORTRÄGE WIRD ES GEBEN?

Geplant sind Vorträge zu den folgenden Themenbereichen.

- (1) Körpererweiterungen und Grundgedanken der Galoissche Theorie
- (2) Unendliche galoissche Erweiterungen (Beispiel: die absolute Galoisgruppe eines endlichen Körpers)
- (3) Abelsche Erweiterungen von \mathbb{Q} (Satz von Kronecker-Weber)
- (4) Einige Begriffe und Ergebnisse aus der algebraischen Zahlentheorie (Hauptbeispiele: quadratische Zahlkörper und Kreisteilungskörper)
- (5) Darstellungen von Gruppen und Galoisdarstellungen über \mathbb{C} (einfachste Fälle des Inversen Galois-Problems)
- (6) p -adische Zahlen und die lokale Struktur der absoluten Galoisgruppe $G_{\mathbb{Q}}$
- (7) Elliptische Kurven – eine knappe Einführung
- (8) Galoisdarstellungen mittels elliptischer Kurven (mit konkreten Beispielen)
- (9) Deformationen von Darstellungen (Begriffsbildung)
- (10) Universelle Deformationen (allgemeine Beschreibung)
- (11) Explizite Deformationen (Konstruktionen)

3. WELCHE VORKENNTNISSE WERDEN ERWARTET?

Vorkenntnisse über die Galoissche Theorie, Ergebnisse der algebraische Zahlentheorie oder die Theorie der elliptischen Kurven sind nicht notwendig, aber – wo unwiderruflich vorhanden – natürlich von großem Wert.

Bei der obigen Vortragsliste handelt es sich um einen ersten Plan, den wir im Laufe des Semesters nachkorrigieren sollten.

4. VORTRAGSPLANUNG

Die Vergabe der einzelnen Vortragsthemen sprechen wir direkt miteinander ab. Ungefähr zwei Wochen vor Eurem jeweiligen Vortragstermin solltet Ihr mich aufsuchen, damit wir den Vortragsinhalt genauer absprechen können. Außerdem bietet es sich an, daß Ihr mir ein paar Tage vor Eurem Termin noch einmal kurz die Endfassung des Vortrages zeigt, damit letzte Fragen geklärt werden können.

MATHEMATISCHES INSTITUT, HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT, DÜSSELDORF
E-mail address: klopsch@math.uni-duesseldorf.de